BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE – clasa a VIII – a

1. Determinați numerele prime a, b, c știind că rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației

   $x^2 - (a + b^2 + 6c)x + ab^2 + 6ac = 0$ verifică relația $x_1^2 + 2x_2 = 504$.

Soluție

Oficiu 1p

$x^2 - (a + b^2 + 6c)x + ab^2 + 6ac = 0 \rightarrow \ x^2 - ax - (b^2 + 6c)x + a(b^2 + 6c) = 0$

$(x - a)(x - b^2 - 6c) = 0$...2 p

$x - a = 0 \rightarrow x_1 = a$ sau $x - b^2 - 6c = 0 \rightarrow x_2 = b^2 + 6c$...1 p

Dar $x_1^2 + 2x_2 = 504 \rightarrow a^2 + 2b^2 + 12c = 504$. Obține $a = 2$..1 p

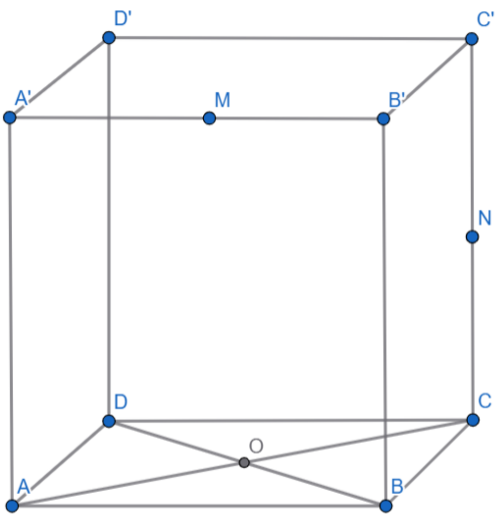
Pentru $a = 2{:}\, 2b^2 + 12c = 500 \rightarrow b = 2$...1 p

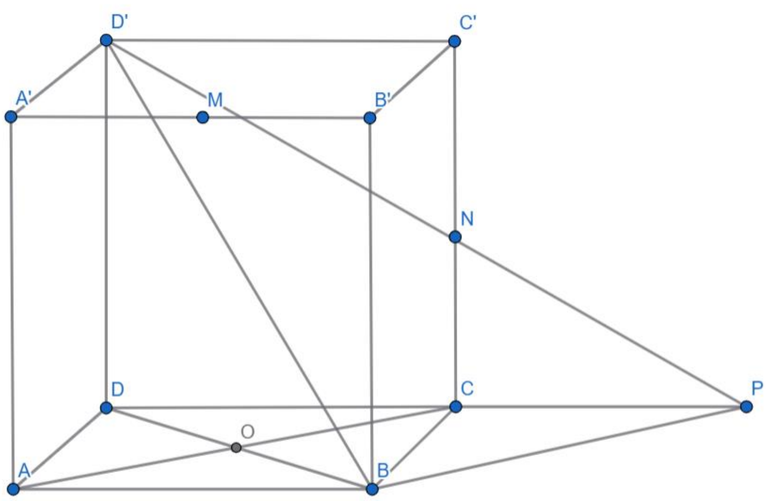
Așadar 6 $c = 246 \rightarrow c = 41$...1 p

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 8\,cm$, O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, iar N este mijlocul muchiei CC'.
   a. Află distanța de la D' la dreapta de intersecție a planelor $(D'BN)$ cu (ABC)
   b. Determină distanța de la punctul O la planul(CMD), unde M este mijlocul segmentului $A'B'$

Soluție

Oficiu 1p





a) $(D'BN) \cap (ABC) = \{BP\}$; $NC \| DD'$ și $NC = \frac{DD'}{2} \to NC$ linie mijlocie în $\Delta D'DP \to DC = CP$..........1 p

Cum $BC = DC = CP = \frac{DP}{2} \to \Delta DPB$ dreptunghic în B deci $BD \perp BP$..........1 p

Aplică teorema celor 3 perpendiculare $\to d(D'; BP) = D'B = 8\sqrt{3}$..........1 p

b) $DC \perp MR, DC \perp OR$ și $MR, OR \subset (MOR) \to DC \perp (MOR)$

Unde R este mijlocul segmentului DC ....1 p

Construim $OS \perp MR, S \in MR$ și cum $OS \perp DC$, obținem $OS \perp (CMD)$, deci $d\big(O; (CMD)\big) = OS$..........1 p

Obține $OS = 2\sqrt{2}$ cm..........1 p

3. Fie expresia $E(x) = \frac{x^2}{2x^2-2x+1}$, definită pentru orice număr real x.
   a. Calculați $E\left(\frac{1}{20}\right) + E\left(\frac{2}{20}\right) + E\left(\frac{3}{20}\right) + E\left(\frac{4}{20}\right) + \cdots + E\left(\frac{19}{20}\right) + E\left(\frac{20}{20}\right)$
   b. Să se demonstreze că $2x^2 - 2x + 1 \geq \frac{1}{2}$, pentru orice număr real x
   c. Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c cu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, avem că $E(a) + E(b) + E(c) \leq 2$.

Soluție

Oficiu 1p

a) $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + (1-x)^2$..........0,5 p

$E(x) = \frac{x^2}{2x^2-2x+1} \to E(1-x) = \frac{(1-x)^2}{2x^2-2x+1} \to E(x) - E(1-x) = 1$..........0,5 p

Conform relației de mai sus pentru $x = \frac{1}{20} \to 1 - x = \frac{19}{20} \to E\left(\frac{1}{20}\right) + E\left(\frac{1}{19}\right) = 1$..........0,5 p

Analog pentru celelalte și obținem: $E\left(\frac{1}{20}\right) + E\left(\frac{2}{20}\right) + E\left(\frac{3}{20}\right) + E\left(\frac{4}{20}\right) + \cdots + E\left(\frac{19}{20}\right) + E\left(\frac{20}{20}\right) = 9 \cdot 1 + E\left(\frac{10}{20}\right) + E\left(\frac{20}{20}\right)$..........0,5 p

$E\left(\frac{1}{20}\right) + E\left(\frac{2}{20}\right) + E\left(\frac{3}{20}\right) + E\left(\frac{4}{20}\right) + \cdots + E\left(\frac{19}{20}\right) + E\left(\frac{20}{20}\right) = 9 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$..........1 p

b) $2x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}(4x^2 - 4x + 2) = \frac{1}{2}[(2x-1)^2 + 1] \geq \frac{1}{2}$..........1 p

c) Din b) $\to E(x) = \frac{x^2}{2x^2-2x+1} \leq 2x^2$..........1 p

Așadar: $E(a) + E(b) + E(c) \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 2$..........1 p