BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE – CLASA a VII - a

Subiectul 1 / Problema 1 (7 puncte)

1. Se consideră numerele

$$x = \sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{12}, \quad y = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

a) Arătați că $x = 4\sqrt{3}$.

b) Arătați că $y = 2 - \sqrt{3}$.

c) Arătați că numărul x + 4y este număr natural.

a) Reducerea radicalilor: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 1p

$x = (5 - 3 + 2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 1p

b) Observarea identității: $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ 1p

Cum $2 > \sqrt{3}$, rezultă $y = 2 - \sqrt{3}$ 1p

c) $x + 4y = 4\sqrt{3} + 4(2 - \sqrt{3}) = 8 \in \mathbb{N}$ 2p

Punct din oficiu 1p

Subiectul 2 / Problema 2 (7 puncte)

2. Se consideră trapezul isoscel ABCD cu AB ∥ CD, AB = 12 cm, CD = BC = 6 cm.

a) Aflați înălțimea trapezului ABCD.

b) Calculați lungimea diagonalei BD.

c) Dacă {O}=AC ∩ BD, calculați aria triunghiului AOD.

a) Fie E proiecția lui D pe AB. $AE = \frac{AB - CD}{2} = 3$ cm 1p

Deoarece AD = BC = 6 cm, $h^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, deci $h = 3\sqrt{3}$ cm 1p

b) BE = 9 cm și $BD^2 = BE^2 + DE^2 = 81 + 27 = 108$, deci $BD = 6\sqrt{3}$ cm 1p

c) Din asemănarea triunghiurilor AOB și DOC (AB ∥ CD), rezultă: $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{12}{6} = 2$;

deci BO = 2OD și BD = 3OD, de unde $OD = \frac{BD}{3} = 2\sqrt{3}$ cm 1p

Cum $AD^2 + BD^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 144 = AB^2$, rezultă AD ⊥ BD; deci în △AOD, înălțimea pe OD este AD = 6 cm 1p

$\mathcal{A}(AOD) = \frac{AD \cdot OD}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm² 1p

Punct din oficiu 1p

Subiectul 3 / Problema 3 (7 puncte)

3. Suma numerelor reale pozitive x și y este egală cu 20.

   a) Demonstrați că S < 2, unde

$$S = \frac{x}{30 - y} + \frac{y}{30 - x}.$$

   b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{x + 1}{1} + \frac{x + 2}{2} + \frac{x + 3}{3} + \cdots + \frac{x + 2026}{2026} = 2026.$$

a) Din x + y = 20 rezultă $30 - y = 10 + x$ și $30 - x = 10 + y$ 1p

$S = \frac{x}{10 + x} + \frac{y}{10 + y}$ 1p

Cum $\frac{x}{10 + x} < \frac{x}{10}$ și $\frac{y}{10 + y} < \frac{y}{10}$, rezultă $S < \frac{x + y}{10} = 2$ 1p

b) Ecuația este $\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \cdots + \frac{x+2026}{2026} = 2026$ 1p

Prin separarea termenilor: $x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2026}) + 2026 = 2026$ 1p

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $\{0\}$. 1p

Punct din oficiu 1p

TOTAL: 21 de puncte