



## CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

### “MATE BT”-Ediția a IX-a

#### CLASA a VII-a

1. a) Calculați suma  $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{3}{302 \cdot 305}$ .

b) Aflați numerele întregi  $x$  și  $y$  ce verifică relația  $2xy - x - y = 4$ .

2. Fie  $x, y, z$  numerele reale pozitive cu proprietatea:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

a) Dați un exemplu de triplet  $(x, y, z)$  diferite două câte două ce verifică relația

b) Arătați că  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ,  $\forall x, y \in [0, \infty]$ .

c) Arătați că  $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} + \sqrt{z^3} \leq \frac{1}{8}$ .

3. Fie trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$  și  $\sphericalangle DCB = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle ADC = 80^\circ$ . Știind că  $BD$  este bisectoarea  $\sphericalangle ABC$ .

a) Calculați  $\sphericalangle ADB$ .

b) Dacă  $M$  este proiecția punctului  $B$  pe  $DC$  calculați  $\frac{DM}{MC}$ .

BAREM

Subiectul 1

a)  $\frac{3}{k*(k+3)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}$ ,  $305 = M3 + 2$ ..... 1p

$$\frac{3}{2*5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \dots \frac{3}{302*305} = \frac{1}{302} - \frac{1}{305} \dots 1p$$

$$\text{Suma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{305} = \frac{303}{610} \dots 1p$$

b)  $2xy - x - y = 4 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y + 1 = 9 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = 9$ .....1p  
 $x, y \in Z$  si  $9 = 3 * 3 = 1 * 9 = 9 * 1 = (-1) * (-9) = (-9) * (-1) =$   
 $= (-3) * (-3)$ .....2p

Finalizare .....1p

Subiectul 2

a) Un exemplu ce verifica relatia.....1p

b)  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .....2p

c)  $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 * x} \leq \frac{x^2+x}{2}$  si analoagele.....1p

$$\text{Din } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z = \frac{1}{4} \dots 1p$$

Finalizare.....2p

Subiectul 3

a)  $(BD \text{ bis } \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$

$AB \parallel DC \text{ (Sec } BD) \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC =$

$= \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ, \sphericalangle BDA = 5^\circ \dots\dots\dots 3p$

b)  $\triangle BDC \text{ isoscel} \Rightarrow BC = DC = a$

Fie  $BM \perp DC, M \in (DC), \frac{MC}{BC} = \cos 30^\circ \Rightarrow MC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 2p$

$DM = DC - MC = a(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}), \frac{DM}{MC} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \dots\dots\dots 2p$