CONCURSUL JUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„MATE BT”

CLASA a VIII – a

Subiectul I (7 puncte)

a) Arătaţi că, oricare ar fi numerele naturale *a* şi *b*, numărul

$N=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left[\sqrt{b}+(a-1)\sqrt{a}\right]$ este pătrat perfect.

b) Fie numerele reale *a* şi *b* care îndeplinesc condiţia $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1$.

Demonstraţi că $a+b=0$.

Subiectul II (7 puncte)

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3ax+a-1; a\in\mathbb{R}$.

a. Arătaţi că punctul $M\left(\frac{1}{3};\ -1\right)$ aparţine graficului funcţiei, oricare ar fi valoarea lui *a*.

b. Rezolvaţi ecuaţia $f(-a)=-3$.

c. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b; a,b\in\mathbb{R}$. Determinaţi numerele *a* şi b pentru care $f(a)=-a$ şi $f(b)=0$.

Subiectul III (7 puncte)

Fie cubul ABCDEFGH şi M, N, P, Q, R, S, T, U mijloacele laturilor, AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE.

a) Calculaţi aria laterală a prismei MNPQRSTU.

b) Arătaţi că volumul prismei MNPQRSTU este egal cu jumătate din volumul cubului.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore
Toate subiectele sunt obligatorii

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VIII-a

***Subiectul I** (7 puncte)*

a) Arătaţi că, oricare ar fi numerele naturale a şi b, numărul
N= $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left[\sqrt{b}+(a-1)\sqrt{a}\right]$ *este pătrat perfect.*

b) Fie numerele reale a şi b care îndeplinesc condiţia $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1$. *Demonstraţi că a+b=0..*

Soluţie:

a)N= $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{ab}+(a-1)a$ .... 1 p

Finalizare 1p

b) $a+\sqrt{a^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$ 1p

$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2+1}+b}{\sqrt{a^2+1}-a}=1 \Rightarrow a+b=\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1}$ (1) 1p

$b+\sqrt{b^2+1}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}-b} \Rightarrow \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}-b}=1 \Rightarrow a+b=\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}$ (2)........ 1p

Din (1) şi (2) ⇒ *a+b=0* 1p

Oficiu 1p

***Subiectul II** (7 puncte)*

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3ax+a-1; a\in\mathbb{R}$.

a. *Arătaţi că punctul M(*$\frac{1}{3}; -1)$ *aparţine graficului funcţiei, oricare ar fi valoarea lui a.*

b. *Rezolvaţi ecuaţia* $f(-a)=-3$.

c. *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b; a,b\in\mathbb{R}$. *Determinaţi numerele a şi b pentru care* $f(a)=-a$ *şi* $f(b)=1$.

Soluţie:

a) $f\left(\frac{1}{3}\right)=-3a\frac{1}{3}+a-1=-a+a-1=-1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -1\right)\in G_f$ $oricare\ ar\ fi\ a\in\mathbb{R}$........1p

b) $f(-a)=-3 \Rightarrow 3a^2+a-4=0$ 1p

$3(a^2-1)+a-1=0 \Rightarrow a_1=1, a_2=-\frac{4}{3}$........ 1p

c) $\begin{cases} f(a)=-a \\ f(b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=-a \\ ab+b=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a-b=-1 \\ ab+b=0 \end{matrix}\right.$ 1p

$\left[\begin{matrix} a=b-1 \\ (b-1)b+b=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=b-1 \\ b=0 \end{cases}$ 1p

Finalizare 1p

Oficiu 1p

***Subiectul III** (7 puncte)*

Fie cubul ABCDEFGH şi M, N, P, Q, R, S, T, U mijloacele laturilor, AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE.

a) Calculaţi aria laterală a prismei MNPQRSTU.

b) Arătaţi că volumul prismei MNPQRSTU este egal cu jumătate din volumul cubului.

Soluţie:

a)$l_{baza\ prismei}=MN=\frac{l\sqrt{2}}{2}$, $A_{l\ prismă}=4l_{cub}\cdot l_{baza\ prismei}=\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$........ 2,5 p

b) $V_{cub}=l^3$, $V_{prismă}=A_b\cdot h=\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot l=\frac{l^3}{2}$........ 2,5p

Finalizare .... 1 p

Oficiu .... 1 p